РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ

Задача 4.1. Пресметнете стойността на числовия израз:

$$A=(27846:9+3801:7)-36\cdot 101.$$

Възможно ли е точно едно от участващите в израза A числа да се замени с друго така, че първоначалната стойност на израза да се увеличи с 5?

Решение: $A=(27846:9+3801:7)-36\cdot 101=(3094+543)-3636=3637-3636=1$.

Желаната замяна е възможна по един от следните два начина: или 27846 да се замени с 27891, или 3801 да се замени с 3836.

<u>*Схема на оценяване*</u>: Правилното извършване на деленията и умножението – по **1 т.**, общо **3 т.** За пресмятането на числовата стойност на израза – още **1 т.** За правилен отговор на въпроса в задачата (без обосновка) – **1 т.** и още **2 т.**, ако е показано как да стане промяната на стойността на израза (достатъчно е посочване на един начин).

Задача 4.2. Дължината и широчината на правоъгълник, измерени в сантиметри, са естествени числа. Обиколката на правоъгълника в сантиметри е двуцифрено число с цифра на единиците 0, а лицето на правоъгълника в квадратни сантиметри е двуцифрено число с цифра на десетиците 9.

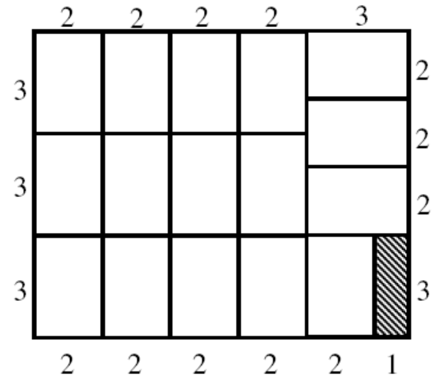
а) Да се намерят всички такива правоъгълници.

б) Лицето на правоъгълника е 99 *кв. см*. Колко най-много правоъгълника с размери 3 *см* и 2 *см* могат да бъдат разположени в дадения правоъгълник без застъпване и припокриване?

Решение: а) Можем да предполагаме, че широчината на търсените правоъгълници е не по-голяма от дължината. Да разгедаме правоъгълник с исканите свойства. Ако широчината на правоъгълника е по-голяма от 9 *см*, то лицето му ще е поне $10\cdot 10=100$ *кв. см*, което е невъзможно. Следователно широчината на правоъгълника е едноцифрено число. Тя не може да 1 *см*, защото тогава дължината трябва да е поне 90 *см* (заради лицето), но в такъв случай обиколката не може да е двуцифрено число. По същия начин проверяваме, че широчината не може да е 2 *см* – тогава дължината трябва да е поне 45 *см,* но обиколката става по-голяма от 90 *см* и няма как да е двуцифрено число, завършващо на 0. Ако дължината на правоъгълника е a *см,* а широчината му е b *см*, то за да завършва обиколката $P=2\cdot(a+b)$ на нула, трябва сборът $a+b$ да завършва на 5 или на 0. Ако широчината на правоъгълника е 3 *см*, то понеже $3\cdot 30=90$ и $3\cdot 33=99$, дължината му може да бъде 30, 31, 32 или 33 *см*. Но само дължина 32 *см* е такава, че $3+32=35$ завършва на 5. Така намираме един правоъгълник, който е решение на задачата. Той е с дължина 32 *см*, широчина 3 *см*, обиколка 70 *см* и лице 96 *кв. см*. По същия начин проверяваме останалите възможности за широчината на правоъгълника. Окончателно получаваме следните правоъгълници, които са решения на задачата:

Дължина	Широчина	Обиколка	Лице
32	3	70	96
13	7	40	91
12	8	40	96
11	9	40	99

б) Като използваме намереното в а), виждаме, че става въпрос за правоъгълника с дължина 11 *см* и широчина 9 *см*. Да отбележим, че измеренията на този правоъгълник могат да бъдат намерени и без да се използват резултатите от а). Понеже лицето на един "малък" правоъгълник е $3 \cdot 2 = 6$ *кв. см* и $17 \cdot 6 = 102 > 99$, то в дадения правоъгълник не могат да бъдат разположени повече от 16 "малки" правоъгълника. Ето пример на вариант за разположение на 16 "малки" правоъгълника:



Защрихованият правоъгълник остава непокрит.

Схема на оценяване: За а) – общо **4 т.**, по **1 т.** за всеки открит правоъгълник. Ако правоъгълниците са само посочени, без никаква обосновка, да се присъждат **2 т.** За б) – общо **3 т.**, от които **1 т.** за намиране броя на правоъгълниците и **2 т.**, ако е построен коректен пример на разположение на правоъгълниците.

Задача 4.3. Да се реши числовият ребус $abcd \cdot a = eeeed$, в който на еднаквите букви отговарят еднакви цифри, а на различните букви отговарят различни цифри.

Решение: Цифрата a не може да бъде равна на 0, защото е първа цифра. Тя не може да е 1, защото тогава произведението $abcd \cdot a$ няма да бъде петцифрено. Да разгледаме последователно останалите възможности за цифрата a. Ако $a = 2$, то произведението $abcd \cdot a$ ще бъде по-малко от $3000 \cdot 2 = 6000$ и няма да е петцифрено. Следователно и този случай е невъзможен. Ако $a = 3$, то произведението $abcd \cdot a$ ще бъде по-малко от $4000 \cdot 3 = 12000$. Затова единствената възможност за цифрата e в този случай е $e = 1$. При това произведението $d \cdot a = d \cdot 3$ трябва да завършва на d, което е възможно само ако $d = 0$ или $d = 5$. Проверката показва, че равенството $3705 \cdot 3 = 11115$ е решение на ребуса. Ако $a = 4$, то отново трябва $e = 1$. Но това е невъзможно, защото $eeeed = 1111d$, докато $4000 \cdot 4 = 16000 > 1111d$. Нека $a = 5$. Тъй като $abcd \cdot a$ е число между $5000 \cdot 5 = 25000$ и $6000 \cdot 5 = 30000$, за e получаваме единствената възможност $e = 2$. Тогава $eeed = 2222d < 25000 = 5000 \cdot 5 < abcd \cdot a$ и отново не получаваме решение. При $a = 6$ произведението $abcd \cdot a$ ще се намира между 36000 и 42000. Затова сега $e = 3$ или $e = 4$. Но ако $e = 3$, то $eeeed = 3333d < 36000$, а ако $e = 4$, то $eeeed = 4444d > 42000$. Следователно и този случай е невъзможен. При $a = 7$ произведението $abcd \cdot a$ ще се намира между $7000 \cdot 7 = 49000$ и $8000 \cdot 7 = 56000$ Затова $e = 4$ или $e = 5$ и понеже отново $eeeed$ ще е $4444d$ или $5555d$, за e остава само възможността $e = 5$. Като отчетем, че трябва $d \cdot a$ да завършва на d, заключаваме, че $d = 0$ или $d = 5$. Тъй като вече $e = 5$, остава $d = 0$. Но делението $eeeed : a = 55550 : 7$ е невъзможно. Отново не получаваме решение на ребуса. Нека $a = 8$. Тогава $abcd \cdot a$ ще бъде между $8000 \cdot 8 = 64000$ и $9000 \cdot 8 = 72000$. Следователно $e = 6$ или $e = 7$. Възможността $e = 7$ отпада, защото $7777d > 72000$. Остава $e = 6$. Отново от факта, че $d \cdot a$ трябва да завършва на d, определяме $d=0$, при което делението $eeeed:a=66660:8$ е невъзможно. Остана случаят $a=9$. Сега произведението $abcd\cdot a$ се намира между $9000\cdot 9=81000$ и 90000, откъдето $e=8$. Както по-горе, намираме, че $d=0$ или $d=5$. Но деленията $eeeed:a=88880:9$ и $eeeed:a=88885:9$ са невъзможни.

Окончателно ребусът има единствено решение: $3705\cdot 3=11115$.

Схема на оценяване: **2 т.**, ако са направени правилни разсъждения за ограничаване стойностите на коя да е от участващите цифри; още **3 т.**, ако са изчерпани всички възможни варианти за стойностите на цифрите (при частично разглеждане на случаите се присъждат **1 т.** или **2 т.** по усмотрение на областната комисия) и още **2 т.** за намиране на решението.