Решения и примерно точкуване

Задача 4.1. Дадени са числовите изрази:

$A = 15 - 5.(55503:7 - 47508:6):5$; $B = (543.4 - 4326:2):3 + 6$ и

$C = \left[(1999 + 2000 + 2001 + 2002) - (2009 + 2010 + 2011) \right].3 - 591.10$.

Пресметнете стойностите им.

Решение:

$$A = 15 - 5.(55503:7 - 47508:6):5$$
$$A = 15 - 5.(7929 - 7918):5$$
$$A = 15 - 5.11:5 \quad \text{(2 т.)}$$
$$A = 15 - 11$$
$$A = 4$$

$$B = (543.4 - 4326:2):3 + 6$$
$$B = (2172 - 2163):3 + 6$$
$$B = 9:3 + 6 \quad \text{(2 т.)}$$
$$B = 3 + 6$$
$$B = 9$$

$$C = \left[(1999 + 2000 + 2001 + 2002) - (2009 + 2010 + 2011) \right].3 - 591.10$$
$$C = (8002 - 6030).3 - 591.10$$
$$C = 1972.3 - 5910 \quad \text{(2 т.)}$$
$$C = 5916 - 5910$$
$$C = 6$$

Задача 4.2. Качвайки се на лифта, забелязах, че сядам на седалка с номер 5. Точно по средата на пътя срещнах седалката с номер 130.

а) Намерете броя на седалките, ако те са подредени по номера.

б) Една седалка изминава 50 *м* за една минута, а разстоянието между всеки две седалки е 8 *м*. За колко минути група от 26 ученици ще се изкачи на върха, ако на всяка седалка пътува по един пътник?

Решение: а) $(130 - 5).2 = 125.2 = 250$ седалки. (2 т.)

б) Дължината на въжето на лифта е $250.8 = 2000\,м$. Тогава разстоянието до върха е $2000:2 = 1000\,м$. (1 т.) Първият ученик се изкачва за $1000:50 = 20$ минути. (1 т.) Когато той слиза, 26-ият ученик след него се намира на разстояние $25.8 = 200\,м$. (1 т.) Това разстояние се изминава за $200:50 = 4$ минути. Следователно групата ще се изкачи за $20 + 4 = 24$ минути. (1 т.)

Задача 4.3. Като се използват девет различни цифри, всяка по веднъж, са записани три трицифрени числа със сбор 2011. Например $381 + 704 + 926 = 2011$ или $413 + 620 + 978 = 2011$ и т.н. Нека A е най-малкото от трите записани трицифрени числа. Кое е най-голямото число, което може да бъде равно на A?

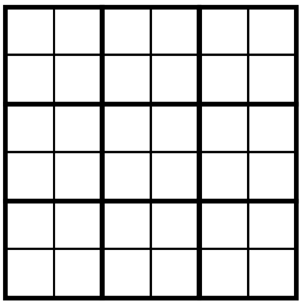
$$\begin{array}{rcccc} & & * & * & * \\ + & & * & * & * \\ & & * & * & * \\ \hline & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Решение: Отг. $A = 496$. Ще използваме, че сумата на всички цифри е 45. За да завършва сумата на единиците на трите числа на 1, тя трябва да е равна на 11 или 21. (1 т.) Ако сумата е 21, то сумата на десетиците на трите числа трябва да е равна на 19 или 9. Ако е 19, то $21 + 19 = 40$ и трябва сумата на трите стотици да е най-много 5 ($40 + 5 = 45$), което е невъзможно, защото сумата на три различни ненулеви цифри е поне $1 + 2 + 3 = 6$. (1 т.) Ако сумата на трите десетици е 9, то $21 + 9 = 30$ и трябва сумата на трите стотици да е най-много 15 ($30+15=45$), а в същото време да е равна на 19, за да е възможно $19+1=20$. Заключаваме, че сумата на трите единици е точно 11. (1 т.) Сега сумата на десетиците на трите числа е 20 или 10. Ако е 20, то сумата на трите стотици е най-много 14, а в същото време трябва да е равна на 18. В крайна сметка получаваме, че сумата на трите единици е 11, а сумата на трите десетици е 10. (1 т.) Сега сумата на трите стотици трябва да е 19. Търсеното число е по-малко от 600, защото $600+700+800=2000>2011$. Да проверим възможно ли е то да започва с 5. Ако започва с 5, сумата на другите две стотици е 14, което е възможно само ако трите стотици са 5, 6 и 8. За сумата (в някакъв ред) на единиците на трите числа има 3 случая: $9+2+0=11$, $7+4+0=11$ и $7+3+1=11$. В нито едни от тези случаи обаче не е възможно да се образува сума 10 с някои три от неизползваните цифри. Следователно цифрата на стотиците на търсеното число е най-много 4. (1 т.) Тъй като търсим възможно най-голямото число, то първата възможност е да проверим за число от вида $49*$. Сега единствената възможност за стотиците на другите две числа е те да са 7 и 8 ($4+7+8=19$), а за десетиците на другите две числа единствената възможност е те да са 0 и 1 ($9+1+0=10$). Тогава най-голямото възможно число, което търсим, може да бъде 496. (1 т.) За цифрите на единиците на другите две числа остава единствената възможност да са 2 и 3. По този начин получаваме пример, който дава решение на задачата: $496+713+802=2011$. (1 т.)

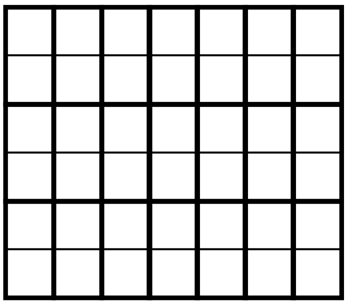
Задача 4.4. Дъска е разграфена на единични квадратчета, всяко от които е с дължина на страната 1 *см*. Гошко и Тошко разполагат с червени и сини правоъгълни плочки от домино с размери 2 *см* и 1 *см*. Гошко покрива дъската с червени плочки без застъпване. След това Тошко отстранява червените плочки и се стреми да покрие дъската със сини плочки без застъпване така, че никоя синя плочка да не заеме мястото на някоя червена. Винаги ли е възможно Тошко да покрие дъската по указания начин, ако дъската е:

а) квадрат със страна 6 *см*; б) правоъгълник с размери 7 *см* и 6 *см*?

Решение:



Черт. 1



Черт. 2

а) Винаги е възможно. Да разделим дъската на квадрати 2×2 (вж. Черт. 1) и да разгледаме един такъв квадрат. (1 т.) Ако в него не се е намирала изцяло червена плочка, то Тошко може да постави в този квадрат 2 хоризонтални или 2 вертикални плочки по избор. (1 т.) Ако в разглеждания квадрат се е намирала хоризонтална червена плочка, то в него със сигурност не е могло да има вертикална плочка (изцяло) и Тошко може да постави 2 вертикални плочки. Аналогично, ако в разглеждания квадрат се е намирала вертикална червена плочка, то Тошко може да постави 2 хоризонтални плочки. (1 т.) Описаното покриване прилагаме за всички квадрати 2×2. Със сигурност никоя синя плочка няма да заеме мястото на някоя червена. (1 т.)

б) Не винаги е възможно. Да разгледаме например покриването с червени плочки от Черт. 2, в което всички плочки са вертикални (1 т.) и да вземем например първия ред 7×2. (1 т.) За да е изпълнено условието на задачата, Тошко трябва да покрие този ред само с хоризонтални сини плочки. Очевидно това е невъзможно. (1 т.)