

ПРОЛЕТЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР

31 март – 2 април 2017 г., Варна

Задачи, решения, оценяване

4.1. Намерете стойността на израза $C = 3.A : B + B : 3$, ако

$A = 26.25 - 25.24 + 24.23 - 23.22 + 22.21 - 21.20 + 20.19 - 19.18 + 18.17 - 17.16 + 16.15 - 15.14$,
а B е най- малкото естествено число, което прави равенството $12 : x = 7 - x$ вярно.

Решение:

$$\begin{aligned} A &= 26.25 - 25.24 + 24.23 - 23.22 + 22.21 - 21.20 + 20.19 - 19.18 + 18.17 - 17.16 + 16.15 - 15.14 = \\ &= 25(26-24) + 23(24-22) + 21(22-20) + 19(20-18) + 17(18-16) + 15(16-14) = \quad (1 \text{ т.}) \\ &= 25.2 + 23.2 + 21.2 + 19.2 + 17.2 + 15.2 = \\ &= 2.(25+23+21+19+17+15) = \quad (1 \text{ т.}) \\ &= 2.3.40 = 240 \quad (1 \text{ т.}) \end{aligned}$$

$$12 : x = 7 - x$$

$$12 = x.(7 - x) \quad (0,5 \text{ т.})$$

$$x = 1 - \text{невъзможно} \quad (0,5 \text{ т.})$$

$$x = 2 - \text{невъзможно} \quad (0,5 \text{ т.})$$

$$x = 3 \Rightarrow 12 = 3.(7 - 3) \Rightarrow B = 3 \quad (0,5 \text{ т.})$$

$$C = 3.A : B + B : 3$$

$$C = 3.240 : 3 + 3 : 3$$

$$= 240 + 1 = 241 \quad (1 \text{ т.})$$

4.2. Образоваме числова редица по следния начин: на първо и второ място записваме съответно цифрите 2 и 7. След това на трето място записваме последната цифра на произведението им. На четвърто място записваме последната цифра на произведението на последните две записани цифри. Така, на всяко следващо място записваме последната цифра на произведението на последните две записани цифри в редицата. Коя е цифрата на $2017^{\text{то}}$ място в тази числова редица?

Решение: Записваме първите няколко числа от редицата

2 7 4 8 2 6 2 2 4 8 2 6 2 2 4 8 2 6 2 2 ... (2 т.)

Забелязваме, че след първите две места се получава група от шест цифри 4 8 2 6 2 2, която се повтаря. (2 т.)

$2017 - 2 = 2015$, $2015 : 6 = 335$ (ост.5) (1 т.) \rightarrow 4 8 2 6 2 2

Последната цифра в така получената редица е 2. (1 т.)

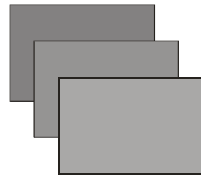
4.3. Ива разполага с голям брой еднакви картончета с форма на правоъгълник с размери: дължина 12 см и ширина 8 см. Тя направила две отделни подреждания:

а) Първо подреждане (Фиг.1): Слага на масата едно картонче. Второто слага върху първото, като го отмества с 3 см надолу и 2 см надясно. Третото картонче слага върху второто, като го отмества също с 3 см надолу и 2 см надясно. Намерете лицето на фигурата, която е получила Ива от така наредените три картончета.

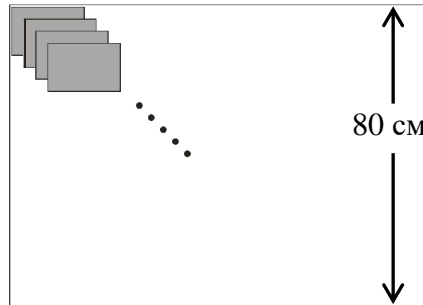
б) Второ подреждане (Фиг.2): Слага едно картонче в горния ляв ъгъл на масата. Второто слага върху първото, като го отмества с 1 см надолу и 1 см надясно. Третото слага върху второто, като го отмества също с 1 см надолу и 1 см надясно. Ива продължава по този начин да слага картончета, докато стигне до ръб на масата.

Ако масата е правоъгълна, дълга 110 см и широка 80 см, колко картончета трябва да сложи Ива, докато стигне ръб на масата?

Намерете лицето на незапълнената част от масата.

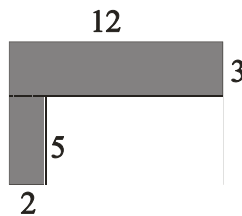


Фиг. 2



Фиг. 2

Решение: а) Можем да разрежем получената фигура на правоъгълник с размери 12 см и 8 см, както и два елемента като показания. **(1 т.)**



Лицето на показаната фигура е $5 \cdot 2 + 12 \cdot 3 = 46$ кв. см. Лицето на правоъгълника е $8 \cdot 12 = 96$ кв.см. **(0,5 т.)**

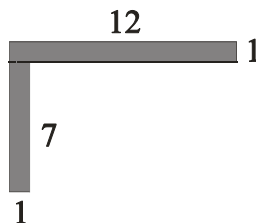
Лицето на получената фигурата е $S = 2 \cdot 46 + 96 = 188$ кв. см. **(0,5 т.)**

Забележка. Точки се присъждат и за всяко друго правилно разрязване.

б) За второто подреждане: Масата има размери 110 см по дължина и 80 см по ширина. За да се достигне десния ръб на масата ще са необходими $1 + (110-12) : 1 = 99$ картончета. (Понеже след първото картонче, всяко следващо добавя само 1 сантиметър към дължината на фигурата.) **(1 т.)**

За да се достигне долния ръб на масата, ще са необходими $1 + (80-8) : 1 = 73$ картончета. Така Ива ще достигне най-напред долния ръб на масата. **(1 т.)**

Фигурата, оформена от картончетата, се състои от един правоъгълник с размери 12 см и 8 см и 72 елемента като показания. **(1 т.)**



$$S_{\text{пок.елемент}} = 12 \cdot 1 + 7 \cdot 1 = 19 \text{ кв. см. (0,5 т.)}$$

$$S_{\text{фигура}} = 72 \cdot 19 + 8 \cdot 12 = 1464 \text{ кв. см. (0,5 т.)}$$

$$S_{\text{маса}} = 80 \cdot 110 = 8800 \text{ кв. см. (0,5 т.)}$$

$$S_{\text{незапълнена част}} = 8800 - 1464 = 7336 \text{ кв. см. (0,5 т.)}$$

4.4. Двама четвъртокласници играят на игра с 10 купчинки от по 10 камъчета. Когато е на ход, всеки играч има право да направи по избор един от следните четири хода:

- 1.) да вземе всичките камъчета от една от наличните купчинки;
- 2.) да вземе всичките камъчета от две от наличните купчинки;

3.) да вземе по едно камъче от всички налични купчинки;

4.) да вземе по две камъчета от всички налични купчинки.

Печели този, който вземе последното камъче. Кой от играчите – първият или вторият, може със сигурност да спечели играта, ако играе правилно? Опишете как да стане това. *Решение:* От условието е ясно, че след всеки ход във всички оставащи купчинки има един и същ брой камъчета. **(1 т.)** След всеки ход ситуацията на играта може да бъде описана с числата m и n , където m е броят на купчинките, а n е броят на камъчетата във всяка от купчинките. Ще записваме ситуацията след всеки ход с $(m; n)$. В началото ситуацията се описва с $(10; 10)$. След първия ход са възможни следните ситуации $(9; 10)$, $(8; 10)$, $(10; 9)$ или $(10; 8)$. **(1 т.)** Във всяка от тези позиции вторият играч може да направи ход, с който да изравни броят на купчинките и камъчетата в тях, т. е. да доведе ситуацията до $(m; m)$. **(2 т.)** Първият играч отново трябва наруши равенството на двете числа, а вторият може да го възстанови. **(1 т.)** Така, докато се стигне до ситуация, в която или броят на купчинките, или броят на камъчетата ще стане по-малък от 3. В тази ситуация вторият играч може да вземе всички камъчета. **(1 т.)**

За коректно написване на конкретен пример на разиграване – **(1 т.)**.

Печелившата стратегия е на втория играч, който винаги трябва да изравнява камъчетата и купчинките.

Забележка. Възможно е задачата да се реши и чрез последователно изчерпване на възможности. *(точките се разпределят по подходящ начин).*

Задачите са предложени, както следва:

4.1. и 4.2. – Катя Чалъкова; 4.3. – Надежда Буюклиева; 4.4. – Теодоси Витанов