Възрастова група: 12кл

Тема: Решаване на задачи свързани с правилни многоъгълници, с помощта на комплексни числа

автор-Юлиян Цветков

Продължителност (3 занятия по 90мин)

Основни знания и умения:

1. Темата може да бъде предложена на ученици, които са запознати с учебното съдържание за комплексни числа от учебната програма за 12кл.ПП.
   1.1. В този смисъл те трябва, да могат да извършват всички действия с комплексни числа в алгебричен вид. Да познават Гаусовата координатна система.
   1.2. Да преобразуват комплексни числа от алгебричен в тригонометричен вид и обратно. Учениците трябва да могат да събират, умножават, делят и степенуват комплексни числа в тригонометричен вид. Да знаят формулите на Моавър за коренуване.
   1.3. Да могат да решават някои уравнения от втора и по-висока степен в множеството на комплексните числа.
   1.4. Да имат опит в решаването на елементарни геометрични задачи с комплексни числа, от предложените в учебника за 12кл. П.П
   1.5. Учениците трябва да са запознати с основните задачи за правилни многоъгълници.
2. Учениците ще бъдат запознати с някои допълнителни знания свързани с комплексни числа:
   2.1. Корени на единицата в множеството на комплексните числа.
   2.2. Използване на комплексните числа разположени по единичната окръжност, като оператор на въртене.
   2.3. Понятието афикс на комплексно число и изразяване на комплексни вектори с афиксите на краищата им.
   2.4. Изразяване на разстояние между две точки, чрез техните афикси, както и условия за успоредност и перпендикулярност на комплексни вектори.

<u>Цел на занятието:</u>

1. В резултат на обучението ученикът трябва:
   1.1. Да затвърди знанията си за комплексни числа изучавани в учебната програма. Да умее да извършва много по-добре основните действия с комплексни числа.
   1.2. Да използва комплексноспрегнати числа, за намиране на разстояние и в различни ,ситуации за установяване на успоредност или перпендикулярност
   1.3. Да прави връзка между ротация и хомотетия и комплексно число.
   1.4. Да направи съпоставка между координатния метод изучаван в учебната програма за 12кл. и съответните методи с комплексни числа.
   1.5. Да прави преценка, дали една задача може лесно да се реши с помощта на разглеждания метод.
   1.6. Основната цел е чрез въвеждане на подходящ център и подходящи оператори на въртене, да достигне до решението на задачата, което е невидимо или по-трудно с други методи.

1.7. Не на последно място е възбуждането на любопитството на учениците за изследване на задачи свързани с правилни многоъгълници с помоща на различни компютърни програми. С помоща на последните могат да бъдат откривани неоткрити досега задачи и създадени хипотези, които вече мотивирано учениците да се опитат да докажат.

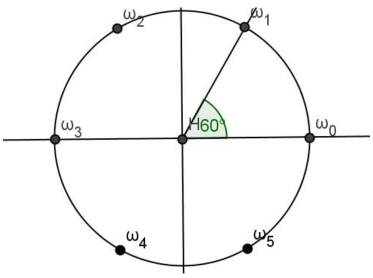
<u>Учебно съдържание:</u>

Теоретични постановки:

Корен $n-$ти от 1.

$$\sqrt[n]{1}=\omega_k=\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)i \qquad , k=\overline{0,n-1}, \text{ където } n\in N$$

Следва илюстрация на решенията на уравнението $x^6=1$.



Черт.1

Твърдение1: $\omega_k=\omega_1^k$

Доказателство: Очевидно при тезиозначения $\omega_0=1$,

$$\omega_1=\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)i,\ \omega_k=\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right)+\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)i=\omega_1^k$$

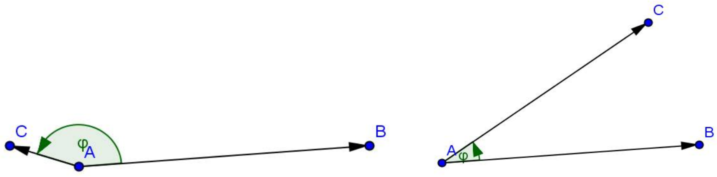
Твърдението ще използваме за крайни числа n, затова няма да го доказваме по индукция..

Твърдение2: $\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k=0$ за $n\geq 2$

Доказателство: От Твърдение1 $\Rightarrow$ $\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_1^k=\dfrac{1-\omega_1^n}{1-\omega_1}=0$.

Тъй като на всяка точка в Гаусовата координатна система съответства комплексно число ,то ще означаваме това число със съответната малка буква и наричаме афикс на точката. Тъй като на всеки вектор $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=b-a$. Използвайки формулата $|z|^2=z\bar{z}$ то $AB^2=\overrightarrow{AB}^2=(a-b)(\bar{a}-\bar{b})$

Основна задача1. Геометричната интерпретация на равенството $\overrightarrow{AB}.z=\overrightarrow{AC}$, където $\arg z=\varphi$ е следната: При последователно прилагане на ротация с център A и ъгъл φ и хомотетия с център A и коефициент $|z|$, т. B се изобразява в т. C. Ако $|z|=1$ $B\xrightarrow{\rho(A,\varphi)}C$. Ние ще използваме предимно $|z|=1$ в тази тема. Равенството $\overrightarrow{AB}.z=\overrightarrow{AC} \quad\Leftrightarrow\ (b-a)z=c-a$.



Черт.2

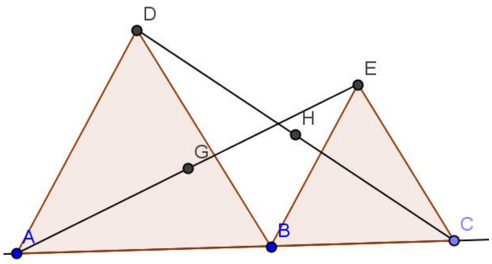
Примерен план на занятията

Занятие1(90мин.) Първите 10 минути правя кратък преговор на понятията и основните теореми от вече изучените уроци за комплексни числа. Следващите 10 мин. отделям за понятията комплексен вектор, афикс и изразяване на разстояние между две точки с афикси. По-нататък в продължение на 15 минути давам няколко примера за корен $n-$ти от 1 с илюстрации по единичната окръжност. Доказвам основните твърдения за около 15 мин. Следват 10 мин за основната задача. Представям зад.1(15мин) и зад.2(15мин). С това първото занятие приключва. За самостоятелна работа остават зад.1 и зад.2 от задачите за самостоятелна работа.

Занятие2(90мин) Първите 10 минути обсъждаме задачите от домашната работа. Следват 20 мин за зад.3. На зад.4 отделяме 15 минути(решаваме първи случай). Зад. 5 решаваме за 15 минути, като рзглеждаме отново само единия случай. Отделяме 30 мин за зад.6 и 7. Занятието приключва. За самостоятелна работа учениците трябва да разгледат всички задачи.

Занятие3(90мин) Цялото занятие посвещаваме на решаване на задачите, върху които има въпроси и обсъждаме предимствата и недостатъците на методите на решаване. На учениците възлагам да потърсят или съставят нподобни интересни задачи.

Задача1: Точките A, B и C лежат в този ред на една права. Построени са равностранни триъгълници ΔABD и ΔBCE., такива че D и E са в една полуравнина определена от правата. Средите на отсечките AE и CD са съответно G и H. Да се докаже ,че ΔBHG е равностранен.



Черт.3

Решение: Да означим с малки букви афиксите на всяка от точките. Ще изберем координатна система с център. точката B. Получаваме $b=0$. Да разгледаме числото $\omega=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Лесно се съобразява, че $\arg(\omega)=\frac{\pi}{3}$ и $|\omega|=1$. Така ω ще ни послужи за въртене на $60°$ обратно на часовниковата стрелка.

Сега $(c-b)\omega=e-b. \Leftrightarrow \quad e=c.\omega \Leftrightarrow g=\frac{a+c\omega}{2}$

Ако използваме,че $\overline{\omega}$ послужи за въртене на $60°$ по посока на часовниковата стрелка.

Тогава $(a-b)\overline{\omega}=d-b \quad \Leftrightarrow \quad d=a\overline{\omega} \quad \Leftrightarrow \quad h=\frac{c+a\overline{\omega}}{2}$. Сега остава да видим, че

$(h-b)\omega = h\omega = \dfrac{c+a\overline{\omega}}{2}\omega = \dfrac{c\omega + a\overline{\omega}\omega}{2} = \dfrac{c\omega + a}{2} = g = g-b$. Това доказва ,че H при ротация спрямо B обратно на часовниковата стрелка се изобразява в G. С което задачата е решена.

Коментар: Твърдението е вярно за всяка последователност на точките A, B и C ако ΔABD и ΔBCE са еднакво ориентирани. При това положение отпада и условието D и E да са в една полуравнина.

Задача2 На страните AC и BC като диаметри външно са построени полуокръжности със среди съответно D и E. Нека т. F е среда на AB. Да се докаже, че ΔDEF е равнобедрен правоъгълен с хипотенуза DE .(Черт.4)

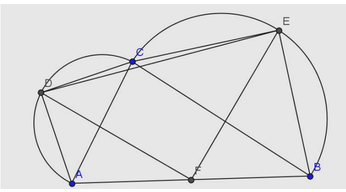
Решение: Отново означаваме афиксите на точките със съответните им малки букви. Сега числото $\omega = i$ ще играе роля на оператор на въртене на 90° обратно на часовниковата стрелка. Подходящо е за център на координатната система да изберем точка F. Така $f = 0$. От F среда на AB следва, че $a = -b$

От основните задачи $\Rightarrow (c-e)i = b-e \quad \Leftrightarrow \quad e = \dfrac{b-ci}{1-i}$. Аналогично получаваме

$(a-d)i = c-d \quad \Leftrightarrow \quad d = \dfrac{c-ai}{1-i}$. Сега

$(e-f)i = ei = \dfrac{b-ci}{1-i}i = \dfrac{bi-ci^2}{1-i} = \dfrac{-ai+c}{1-i} = d = d-f$ От това следва, че $EF = FD$ и $\angle EFD = 90^\circ$

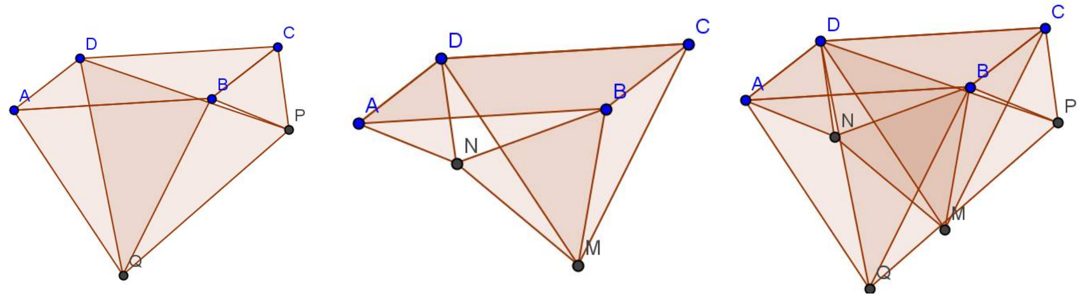
Коментар. Ако вземем диаметралнопротивоположните точки на E и D и F твърдението остава вярно



Черт.4.

Задача3. Върху страните AB и AC на ΔABC външно са построени квадрати $ABNQ$ и $ACMP$. Да се докаже, че BP и CQ са равни и перпендикулярни.

Задача4(от автора). На страните AB и BC на успоредника $ABCD$ външно за $ABCD$ са построени равностранните триъгълници ΔABQ и ΔBCP на страните CD и DA вътрешно за $ABCD$ са построени равностранните триъгълници ΔCDM и ΔDAN. Да се докаже, че ортоцентровете на триъгълниците ΔPQD и ΔMND съвпадат.



Черт5.

Решение: За център на координатната система избираме пресечната точка на диагоналите на успоредника. От тук е ясно,че $d=-b$ и $c=-a$. Ще означим с

$\omega_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ и $\omega_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\arg\omega_1=\frac{\pi}{3}$, а $|\omega_1|=1$ и $\arg\omega_2=\frac{2\pi}{3}$, а $|\omega_2|=1$ Тези числа ще играят основна роля в пресмятанията ни и са полезни в много подобни задачи. Отбелязваме четири техни свойства :

1. $\omega_1^{\,2}=\omega_2$
2. $\omega_2^{\,3}=1$
3. $\omega_1.\omega_2=-1$
4. $1+\omega_2+\omega_2^{\,2}=0$

Вижда се, че някои от свойствата следват непосредствено от другите, но ние ще ги използваме във някои от показаните варианти.

От ΔBPC равностранен

$$\Rightarrow\ (c-p)\omega_1=b-p\quad \Rightarrow p=\frac{b-c\omega_1}{1-\omega_1}\quad \Rightarrow\quad p-d=\frac{b-c\omega_1-d+d\omega_1}{1-\omega_1}$$

От ΔDQC равностранен

$$\Rightarrow\ (b-q)\omega_1=a-q\quad \Rightarrow q=\frac{a-b\omega_1}{1-\omega_1}\quad \Rightarrow\quad q-d=\frac{a-b\omega_1-d+d\omega_1}{1-\omega_1}$$

Разглеждаме

$$\frac{p-d}{q-d}=\frac{b-c\omega_1-d+d\omega_1}{a-b\omega_1-d+d\omega_1}.\frac{\omega_1}{\omega_1}=\omega_1\frac{2b-\frac{a}{\omega_2}+\frac{b}{\omega_2}}{-\frac{a}{\omega_2}-\frac{b}{\omega_2}-2b\omega_2}=\omega_1\frac{2b\omega_2-a+b}{-a-b-2b\omega_2^{\,2}}=\omega_1\frac{2(-1-\omega_2^{\,2})b-a+b}{-a-b-2b\omega_2^{\,2}}=\omega_1$$

От тук непосредствено следва, че $\angle PQD=60^\circ$ и $QD=PD$. $\Rightarrow \Delta PQD$ е равностранен. Аналогично се доказва, че и $\Rightarrow \Delta MNB$ е равностранен. Остава да докажем, че медиценровете им съвпадат, което доказва задачата. Нека

O_1 и O_2 са центровете на ΔPQD и ΔMNB

Тогава $o_1=\dfrac{p+q+d}{3}=\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{b-c\omega_1}{1-\omega_1}+\dfrac{a-b\omega_1}{1-\omega_1}-b\right]=\dfrac{a(1+\omega_1)}{3(1-\omega_1)}$

От ΔCDM равностранен $\Rightarrow\ (c-m)\omega_1=d-m\quad \Rightarrow m=\dfrac{d-c\omega_1}{1-\omega_1}=\dfrac{-b+a\omega_1}{1-\omega_1}$

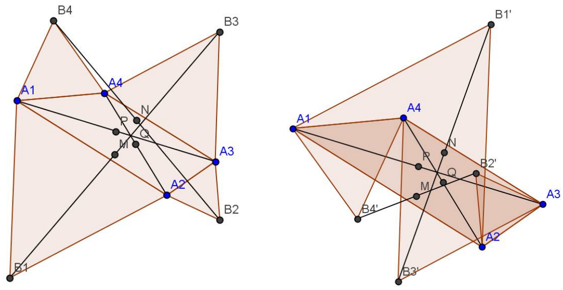
От ΔADN равностранен $\Rightarrow\ (d-n)\omega_1=a-n\quad \Rightarrow n=\dfrac{a-d\omega_1}{1-\omega_1}=\dfrac{a+b\omega_1}{1-\omega_1}$

Получаваме $o_2=\dfrac{m+n+b}{3}=\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{-b+a\omega_1}{1-\omega_1}+\dfrac{a+b\omega_1}{1-\omega_1}+b\right]=\dfrac{a(1+\omega_1)}{3(1-\omega_1)}\Rightarrow o_1=o_2\Leftrightarrow O_1\equiv O_2$

Задача5(Я.Понарин).

Върху страните A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 и A_4A_1 на произволен четириъгълник външно са построени равностранни триъгълници, съответно с върхове B_1, B_2, B_3, B_4. Нека M и N са средите на B_1B_3 и B_2B_4, а P и Q на A_1A_3 и A_2A_4. Да се докаже, че $MNPQ$ е квадрат.

Задача(с корекция и допълнение от автора).
Върху страните A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 и A_4A_1 на произволен четириъгълник външно са построени равностранни триъгълници, съответно с върхове B_1, B_2, B_3, B_4 . Нека M и N са средите на B_1B_3 и B_2B_4, а P и Q на A_1A_3 и A_2A_4. Да се докаже, че е ромб с ъгъл $60°$.Ако равностранните триъгълници са построени вътрешно, то $MNPQ$ съвпада с ромба от първия случай.



Черт.6

Решение: С малки букви ще означим афиксите на съответните точки. Ще използваме комплексното число $\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{\pi}{6} + i.\sin\frac{\pi}{6}$, като оператор за въртене на 60° обратно на часовниковата стрелка.

Получаваме: $(a_2 - b_1)\omega = a_1 - b_1 \;\; \Rightarrow b_1 = \frac{a_1 - a_2\omega}{1-\omega}$. Аналогично получаваме

$b_2 = \frac{a_2 - a_3\omega}{1-\omega}$, $b_3 = \frac{a_3 - a_4\omega}{1-\omega}$ и $b_4 = \frac{a_4 - a_3\omega}{1-\omega}$.

Имаме $p = \frac{b_1 + b_3}{2} = \frac{a_1 + a_3 - (a_2 + a_4)\omega}{2(1-\omega)}$ и $q = \frac{b_2 + b_4}{2} = \frac{a_2 + a_4 - (a_1 + a_3)\omega}{2(1-\omega)}$.

Също $m = \frac{a_2 + a_4}{2}$ и $n = \frac{a_1 + a_3}{2}$.

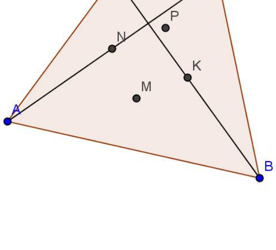
От тук $p - m = \frac{a_1 + a_3 - a_2 - a_4}{2(1-\omega)}$ и $n - q = \frac{a_1 + a_3 - a_2 - a_4}{2(1-\omega)}$ $\Rightarrow p - m = n - q$.

До тук доказахме, че $MNPQ$ е успоредник. Освен това

$$m - q = \frac{(a_2 + a_4)(1-\omega) - a_2 - a_4 + (a_1 + a_3)\omega}{2(1-\omega)} = \frac{(-a_2 - a_4 + a_1 + a_3)\omega}{2(1-\omega)} = (n-q)\omega$$

$\Rightarrow MQ = NQ$ и $\angle MQN = 60°$. И така $MNPQ$ е ромб с ъгъл 60°. Идентично се разглежда и втория вариант.

Задача6: Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$ (различен от квадрат). Триъгълниците ABP и са BCM правоъгълни и равнобедрени с върхове P и M, такива че имат общи части с вътрешността на четириъгълника. Да се докаже, че точките P и M са противоположни върхове на квадрат с други два върха средите на AC и BD тогава и само тогава, когато $AC = BD$ и $AC \perp BD$



Черт.7

Решение: „$\Rightarrow$” Нека K среда на AC, а N е среда на BD. За решението на задачата ще използваме комплексни числа. Нека a, b, c, d, k, n, m и p са съответно афиксите на точките. Имаме $(p-a)i = b-p$ и $(b-m)i = c-m$. От тук получаваме $p = \dfrac{b-ai}{1-i} = \dfrac{b+a-ai-bi}{2}$ и $m = \dfrac{c-bi}{1-i} = \dfrac{c+b-bi+ci}{2}$. Ясно е, че: $n = \dfrac{b+d}{2}$ и $k = \dfrac{a+c}{2}$.

За векторите $\overrightarrow{MN} = n-m = \dfrac{d-c+bi-ci}{2}$ и $\overrightarrow{MK} = k-m = \dfrac{a-b+bi-ci}{2}$. От условието, че $KMNP$ е квадрат $\Rightarrow \overrightarrow{MN}i = \overrightarrow{MK} \Leftrightarrow$

$$\frac{d-c+bi-ci}{2}i = \frac{a-b+bi-ci}{2} \Leftrightarrow c+di = a+bi \quad \Leftrightarrow \quad (b-d)i = c-a \quad \Leftrightarrow \quad BD = AC \text{ и}$$

$BD \perp AC$ (1). Прави впечатление, че не сме използвали напълно условието, че $KMNP$ е квадрат.

"$\Leftarrow$" За решението на обратната задача освен (1) е достатъчно да покажем и ,че $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{PN} \quad \Leftrightarrow$

$$k-m = p-n \Leftrightarrow a-b+bi-ci = a-b+bi-ci \Leftrightarrow b-d = (a-c)i \Leftrightarrow (b-d)i = c-a \Leftrightarrow BD \perp AC$$

и $BD = AC$

Последното вече видяхме, че е изпълнено.

Изключение прави случаят когато $ABCD$ е квадрат. Тогава и само гогава точките K, M, N и P съвпадат, което е видно както с елементарни геометрични наблюдения, така и с помоща на комплексните числа.

Задача7: Нека $A_1A_2...A_n$ е правилен n-ъгълник с център O. Точка P лежи на окр. $k(O, r)$. Да се докаже, че $\sum_{i=1}^{n} A_iP^2$ не зависи от разположението на P върху k.

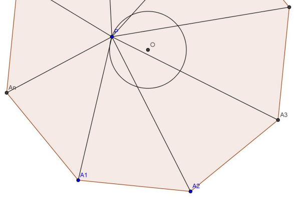
Решение: Нека $\omega_1, \omega_2 ... \omega_n$ са $n-$ти корени на единицата. Ще използваме, че $\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n = 0$ и $\overline{\omega_1} + \overline{\omega_2} + \ldots + \overline{\omega_n} = 0$. Да разгледаме точка O като център на Гаусова координатна система. С малки букви означаваме афиксите на всички точки от задачата. Тогава:

$a_i = R\omega_i$ (R е радиусът на описаната около $A_1A_2...A_n$ окръжност)

$$\sum_{i=1}^{n} A_iP^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_i - p)(\overline{a_i} - \overline{p}) = \sum_{i=1}^{n} (R\omega_i - p)(\overline{R\omega_i} - \overline{p}) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} [R^2\omega_i\overline{\omega_i} - R\overline{p}\omega_i - Rp\omega_i + p\overline{p}] = R^2\sum_{i=1}^{n} 1 - R\overline{p}\sum_{i=1}^{n} \omega_i - Rp\sum_{i=1}^{n} \overline{\omega_i} + \sum_{i=1}^{n} p\overline{p} = nR^2 - 0 - 0 + nr^2$$

$= n(R^2 + r^2)$. Тъй като R и r са константи, то твърдението е доказано.



Черт.8

Задачи за самостоятелна работа

Задача1 На правата AB е взета точка C (B между A и C). В една полуравнина относно правата са построени квадратите $ABDE$ и $BCFG$. Да се докаже, че средата H на AG, средата I на CD и точка B са върхове на равнобедрен правоъгълен триъгълник.(Коларов)

Упътване: Изберете точка B за център на координатната система и оператор за въртене числото i.

Задача2 Точката O е център на квадрат $ABCD$, а M и K са среди съответно на BO и CD Да се докаже, че ΔAMK е равнобедрен и правоъгълен.

Задача3. На страните на четириъгълник външно са построени квадрати. Докажете, че отсечките съединяващи центровете на квадратите построени на противоположните страни, са равни и перпендикулярни

Задача4 Точките A, D, B и C лежат в този ред на една права, като $AD = BC$. Построени са равностранните триъгълници ΔADE и ΔDCF, като E и F са в една полуравнина относно правата. Да се докаже, че ΔBEF е равностранен.(авторска)

Упътване: Използвайте D за център. Тогава от $d - a = c - b \Rightarrow b = a + c$.Изберете за оператор на въртене $\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ и $\overline{\omega}$.

Задача5 Даден е квадрат $ABCD$. На страните AD и BC са взети точки E и F, такива че $AE = CF$. Построени са равностранните триъгълници ΔAEG, ΔBFH и ΔCDI, които нямат общи части с квадрата. Да се докаже, че ΔGHI е равностранен (автора).

Задача6 Върху страните на триъгълник външно са построени равностранни триъгълници. Да се докаже, че центровете на тези триъгълници са върхове на равностранен триъгълник. Същото да се докаже, ако триъгълниците са построени вътрешно.

Задача7: Шестоъгълника $ABCDEF$ има център на симетрия. Върху страните AB, CD и EF са построени еднаквоориентираните равностранни ΔGHI триъгълници ΔABH, ΔCDI и ΔEFJ . Да се докаже, че ΔHIJ е равностранен.

Упътване: Използвайте за център на Гаусовата координатна система центъра на симетрия и операторите от зад.2 за самостоятелна работа. Забележете, че тази задача е по-общ случай на предходната.

Задача8. На страните на четириъгълник външно са построени квадрати. Докажете, че отсечките съединяващи центровете на квадратите построени на противоположните страни, са равни и перпендикулярни.

Задача9(Я.Понарин). На страните AB и CD на четириъгълника $ABCD$ са построени еднакво ориентираните квадрати $ABMN$ и $CDKL$. Да се докаже , че средите на диагоналите на $ABCD$ и $MNKL$ са върхове на квадрат или съвпадат.

Задача9(от автора). Даден е правилен шестоъгълник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. В равнината му е взета произволна точка P . Да се докаже, че $PA_1^2.PA_3^2.PA_5^2 + PA_2^2.PA_4^2.PA_6^2$ е константа.

Задача10(от Рабинович). Даден е правилен шестоъгълник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. На по-малката дъга A_1A_2 е взета точка P . Да се докаже, че

$$PA_1.PA_6 + PA_1.PA_2 - PA_2.PA_3 + PA_3.PA_4 - PA_4.PA_5 + PA_5.PA_6 = 0$$

Задача11(на автора). Нека $A_1A_2...A_n$ е правилен n-ъгълник с център O. Точка P лежи на окръжност $k(O,r)$. Да се докаже, че $\sum_{i=1}^{n} A_iP^m$, $m \in \{2,4,6\}$ не зависи от разположението на P върху k .

Използвана литература:

[1] Понарин.Я.П Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах.2004г

[2] Додунеков Ст.,Кожухарова Г. Математика 12кл за ПП . Регалия6 2005г.

[3] Коларов К.,Лесов Хр. Сборник от задачи по геометрияVII-XIIклас 2007г.

[4] Математика+ 3бр 2011